Aula 2

Motivação histórica

A solução da equação quadrática

$$ax^2 + bx + c = 0$$

é dada pela fórmula resolvente

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

e portanto, por exemplo, a equação

$$x^2 + x - 2 = 0$$

tem soluções

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = 1\,, -2.$$

No entanto, basta trocar o sinal dum coeficiente...

$$x^2 + x + 2 = 0$$

e

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{2}$$

já dá problemas!

Definição:Define-se o conjunto dos números complexos, e designa-se por $\mathbb{C}$, como o conjunto dos pares ordenados de $\mathbb{R}^2$

$$\mathbb{C} = \{z = (x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

com as operações

- **adição**

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

- **multiplicação**

$$z_1 z_2 = (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Teorema:O conjunto $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ dos números complexos com as operações de soma e multiplicação forma um **corpo**.

- Comutatividade da soma e multiplicação

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

$$z_1 z_2 = z_2 z_1$$

- Associatividade da soma e multiplicação

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$$

$$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$$

- Existência de elementos neutros da soma e multiplicação

$$z + (0, 0) = z$$

$$z(1, 0) = z$$

- Existência de simétrico

$$(x_1, y_1) + (-x_1, -y_1) = (0, 0)$$

- Existência de inverso (para $z = (x, y) \neq (0, 0)$)

$$(x, y)\left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2}\right) = (1, 0)$$

- Propriedade distributiva

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$$

Proposição: Os elementos neutros da soma e multiplicação são únicos, assim como são únicos também o simétrico de cada $z = (x, y) \in \mathbb{C}$, que se designa por $-z = (-x, -y)$, e o inverso de cada $z = (x, y) \neq (0, 0) \in \mathbb{C}$, que se designa por $z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}\right)$.

Definição: Definem-se em $\mathbb{C}$ as seguintes operações

- **Subtração**

$$z_1 - z_2 := z_1 + (-z_2)$$

- **Divisão**

$$\frac{z_1}{z_2} := z_1 z_2^{-1} \qquad (z_2 \neq (0, 0))$$

- **Potência inteira**

$$z^n := \underbrace{z \cdots z}_{n \text{ vezes}} \qquad (n \in \mathbb{N})$$